Une source de lumière est caractérisée par son profil spectral $\mathrm{dI}_0 = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-(\sigma-\sigma_0)^2/a^2}\,\mathrm{d}\sigma$, où $\mathrm{dI}_0(\sigma)$ est l'éclairement d'une raie de nombre d'onde σ et de largeur $\mathrm{d}\sigma$, monochromatique. On a $\sigma = 1/\lambda$ et $a \ll \sigma_0$.

1. Tracer le profil $\dfrac{\mathrm{dI}_0}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma)$ de ce spectre. Faire apparaître σ_0 et calculer la largeur à mi-hauteur de la raie, $\Delta\sigma$.

2. On éclaire à l'aide de cette source un interféromètre de Michelson monté en lame d'air d'épaisseur e variable. Établir l'expression de l'éclairement I au centre de la figure d'interférences, en fonction de e. Tracer $\mathrm{I}(e)$.

On donne l'intérgale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/a^2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,u\,x}\,\mathrm{d}u = a\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\pi^2\,a^2\,x^2}$.

3. Proposer une méthode de mesure de la largeur spectrale de la raie $\Delta\sigma$.

CPGÉ PC	Largeur spectrale de raie	Opt inter

Merci de signaler d'éventuelles erreurs d'énoncé ou de corrigé à santczak@online.fr.

Une source de lumière est caractérisée par son profil spectral $\mathrm{dI_0} = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-(\sigma-\sigma_0)^2/a^2}\,\mathrm{d}\sigma$, où $\mathrm{dI_0}(\sigma)$ est l'éclairement d'une raie de nombre d'onde σ et de largeur $\mathrm{d}\sigma$, monochromatique. On a $\sigma = 1/\lambda$ et $a \ll \sigma_0$.

1. Tracer le profil $\dfrac{\mathrm{dI_0}}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma)$ de ce spectre. Faire apparaître σ_0 et calculer la largeur à mi-hauteur de la raie, $\Delta\sigma$.

2. On éclaire à l'aide de cette source un interféromètre de Michelson monté en lame d'air d'épaisseur e variable. Établir l'expression de l'éclairement I au centre de la figure d'interférences, en fonction de e. Tracer $\mathrm{I}(e)$.

On donne l'intérgale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/a^2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,u\,x}\,\mathrm{d}u = a\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\pi^2\,a^2\,x^2}$.

3. Proposer une méthode de mesure de la largeur spectrale de la raie $\Delta\sigma$.

Corrigé

1. On a une courbe en cloche autour de σ_0. On calcule $\Delta\sigma = 2\,a\sqrt{\ln 2}$. On constate que a est proportionnel à $\Delta\sigma$.

2. La différence de marche au centre est $\delta = 2\,e$. En écrivant $\mathrm{dI_0} = f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$, on peut écrire l'éclairement au centre correspondant à une raie monochromatique à σ :

$$\mathrm{dI} = 2\,f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,(1+\cos 2\pi\,\delta\sigma)$$

En transformant le cosinus en somme de deux exponentielles complexes, on obtient l'éclairement total pour toutes les longueurs d'onde :

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\,f(\sigma)\mathrm{d}\sigma + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\,\pi\,2\,e\,\sigma} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\,\pi\,2\,e\,\sigma}\right)\,\mathrm{d}\sigma$$

que l'on peut écrire

$$\mathrm{I} = \mathrm{I_m} + \mathrm{F} + \mathrm{F}^*$$

où

$$\mathrm{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-(\sigma-\sigma_0)^2/a^2}\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,\sigma\,2\,e}\,\mathrm{d}\sigma$$

Avec l'expression proposée, en posant $u = \sigma - \sigma_0$, on obtient

$$\mathrm{F} = \mathrm{C}\,a\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi\,\sigma_0\,e}\mathrm{e}^{-4\,\pi^2\,a^2\,e^2}$$

soit finalement

$$\mathrm{I} = \mathrm{I_m} + 2\,\mathrm{C}\,a\,\sqrt{\pi}\,\cos(4\,\pi\,\sigma_0\,e)\,\mathrm{e}^{-4\pi^2\,a^2\,e^2}$$

On dessine I en fonction de e : une fonction cosinus de période spatiale $1/2\,\sigma_0$ petite, centrée sur une valeur moyenne $\mathrm{I_m}$, modulée en amplitude par une enveloppe de forme gaussienne, de largeur à mi-hauteur Δe, telle que $\mathrm{e}^{-4\pi^2\,a^2\,(\Delta e)^2} = 1/2$, donc telle que $a = \sqrt{\ln 2}/(2\pi\,\Delta e)$.

3. Or on avait $\Delta\sigma = 2\,a\sqrt{\ln 2}$, ce qui donne $\Delta\sigma = \ln 2/(\pi\,\Delta e)$. On peut, sur le tracé de $\mathrm{I}(e)$, mesurer la largeur à mi-hauteur de l'enveloppe, Δe, qui nous donne $\Delta\sigma$ par calcul.

On voit que plus la raie sera fine, donc plus $\Delta\sigma$ sera petit, plus Δe sera grande. L'interféromètre de Michelson a une résolution théorique infinie, c'est-à-dire qu'il est théoriquement capable de mesurer des écarts infiniment fins dans un spectre. Le problème est qu'il faut pouvoir mesurer un Δe très grand, donc que l'épaisseur du Michelson puisse être aussi grande que possible, ce qui n'est pas si simple à réaliser...

CPGÉ PC	Largeur spectrale de raie	Opt inter

Merci de signaler d'éventuelles erreurs d'énoncé ou de corrigé à santczak@online.fr.

Une source de lumière est caractérisée par son profil spectral $\mathrm{dI_0} = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-(\sigma-\sigma_0)^2/a^2}\,\mathrm{d}\sigma$, où $\mathrm{dI_0}(\sigma)$ est l'éclairement d'une raie de nombre d'onde σ et de largeur $\mathrm{d}\sigma$, monochromatique. On a $\sigma = 1/\lambda$ et $a \ll \sigma_0$.

1. Tracer le profil $\dfrac{\mathrm{dI_0}}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma)$ de ce spectre. Faire apparaître σ_0 et calculer la largeur à mi-hauteur de la raie, $\Delta\sigma$.

2. On éclaire à l'aide de cette source un interféromètre de Michelson monté en lame d'air d'épaisseur e variable. Établir l'expression de l'éclairement I au centre de la figure d'interférences, en fonction de e. Tracer $\mathrm{I}(e)$.

On donne l'intérgale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/a^2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,u\,x}\,\mathrm{d}u = a\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\pi^2\,a^2\,x^2}$.

3. Proposer une méthode de mesure de la largeur spectrale de la raie $\Delta\sigma$.

Corrigé

1. On a une courbe en cloche autour de σ_0. On calcule $\Delta\sigma = 2\,a\,\sqrt{\ln 2}$. On constate que a est proportionnel à $\Delta\sigma$.

2. La différence de marche au centre est $\delta = 2\,e$. En écrivant $\mathrm{dI_0} = f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$, on peut écrire l'éclairement au centre correspondant à une raie monochromatique à σ :

$$\mathrm{dI} = 2\,f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,(1 + \cos 2\pi\,\delta\sigma)$$

En transformant le cosinus en somme de deux exponentielles complexes, on obtient l'éclairement total pour toutes les longueurs d'onde :

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\,f(\sigma)\mathrm{d}\sigma + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\,\pi\,2\,e\,\sigma} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\,\pi\,2\,e\,\sigma}\right)\,\mathrm{d}\sigma$$

que l'on peut écrire
$$\mathrm{I} = \mathrm{I_m} + \mathrm{F} + \mathrm{F}^*$$

où
$$\mathrm{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-(\sigma-\sigma_0)^2/a^2}\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,\sigma\,2\,e}\,\mathrm{d}\sigma$$

Avec l'expression proposée, en posant $u = \sigma - \sigma_0$, on obtient

$$\mathrm{F} = \mathrm{C}\,a\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi\,\sigma_0\,e}\mathrm{e}^{-4\,\pi^2\,a^2\,e^2}$$

soit finalement
$$\mathrm{I} = \mathrm{I_m} + 2\,\mathrm{C}\,a\,\sqrt{\pi}\,\cos(4\,\pi\,\sigma_0\,e)\,\mathrm{e}^{-4\pi^2\,a^2\,e^2}$$

On dessine I en fonction de e : une fonction cosinus de période spatiale $1/2\,\sigma_0$ petite, centrée sur une valeur moyenne $\mathrm{I_m}$, modulée en amplitude par une enveloppe de forme gaussienne, de largeur à mi-hauteur Δe, telle que $\mathrm{e}^{-4\pi^2\,a^2\,(\Delta e)^2} = 1/2$, donc telle que $a = \sqrt{\ln 2}/(2\pi\,\Delta e)$.

3. Or on avait $\Delta\sigma = 2\,a\,\sqrt{\ln 2}$, ce qui donne $\Delta\sigma = \ln 2/(\pi\,\Delta e)$. On peut, sur le tracé de $\mathrm{I}(e)$, mesurer la largeur à mi-hauteur de l'enveloppe, Δe, qui nous donne $\Delta\sigma$ par calcul.

On voit que plus la raie sera fine, donc plus $\Delta\sigma$ sera petit, plus Δe sera grande. L'interféromètre de Michelson a une résolution théorique infinie, c'est-à-dire qu'il est théoriquement capable de mesurer des écarts infiniment fins dans un spectre. Le problème est qu'il faut pouvoir mesurer un Δe très grand, donc que l'épaisseur du Michelson puisse être aussi grande que possible, ce qui n'est pas si simple à réaliser...