Une fibre optique d'axe x a un indice variant en fonction de la distance y à l'axe : $n(y) = n_0\,(1 + a\,y^2/\mathrm{R}^2)$, avec $n(\mathrm{R}) = n_2$, où $\mathrm{R} = 25\ \mu$m, $n_0 = 1{,}5$ et $n_2 = 0{,}99\,n_0$.
Un rayon lumineux entre dans la fibre en $x = 0$, $y = 0$, en faisant un angle α_0 avec l'axe. Déterminer la trajectoire de ce rayon lumineux.
On veut que le rayon se propage dans le cœur de la fibre (pour $|y| < \mathrm{R}$). Quel angle α_0 ne fait-il pas dépasser ?

Merci de signaler d'éventuelles erreurs d'énoncé ou de corrigé à santczak@online.fr.

Une fibre optique d'axe x a un indice variant en fonction de la distance y à l'axe : $n(y) = n_0\,(1 + a\,y^2/\mathrm{R}^2)$, avec $n(\mathrm{R}) = n_2$, où $\mathrm{R} = 25\ \mu\mathrm{m}$, $n_0 = 1{,}5$ et $n_2 = 0{,}99\,n_0$.

Un rayon lumineux entre dans la fibre en $x = 0$, $y = 0$, en faisant un angle α_0 avec l'axe. Déterminer la trajectoire de ce rayon lumineux.

On veut que le rayon se propage dans le cœur de la fibre (pour $|y| < \mathrm{R}$). Quel angle α_0 ne fait-il pas dépasser ?

Corrigé

Comme n_2 est inférieur à n_0, a est négatif ($a = n_2/n_0 - 1 = -0{,}01$). Si on appelle $\alpha(x)$ l'angle que fait le rayon avec la direction axiale, alors l'angle d'incidence est $i = \pi/2 - \alpha$. La loi de Descartes s'écrit $n(y)\ \sin(i(y)) = n(y + \mathrm{d}y)\ \sin(i(y + \mathrm{d}y))$, ou encore $n\ \sin i = \mathrm{C^{te}}$, soit $n\ \cos\alpha = \mathrm{C^{te}} = n_0\ \cos\alpha_0$.

Or
$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}$$

En explicitant $n(y)$, cela donne l'équation différentielle

$$1 + a\,\frac{y^2}{\mathrm{R}^2} = \cos\alpha_0\,\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

On élève au carré, puis on tranforme $1/\cos^2\alpha_0$ en $1 + \tan^2\alpha_0$: on obtient finalement

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \tan^2\alpha_0\,\left(1 + \frac{2\,a}{\mathrm{R}^2\ \sin^2\alpha_0}\,y^2\right)$$

Dans tout ce qui précède, on a considéré un rayon montant (et des angles géométriques). Il faudrait refaire la démonstration pour un rayon descendant. Mais cela permet de passer à la racine carrée en n'envisageant qu'un seul cas. On pose $k = -2\,a/(\mathrm{R}^2\ \sin^2\alpha_0)$ (on a alors $k > 0$) et on obtient

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan^2\alpha_0\,\sqrt{1 - k\,y^2}$$

On doit connaître ou retrouver la primitive de la fonction $1/\sqrt{1 - k\,y^2}$, qui est l'arcsinus. Cela donne, compte tenu des conditions initiales,

$$y = \frac{1}{\sqrt{k}}\ \sin\left(\sqrt{k}\ \tan\alpha_0\,x\right)$$

soit
$$y = \frac{\mathrm{R}\ \sin\alpha_0}{\sqrt{-2\,a}}\ \sin\left(\frac{\sqrt{-2\,a}}{\mathrm{R}\ \cos\alpha_0}\,x\right)$$

C'est une fonction sinusoïdale.

Si on veut que le rayon reste au cœur de la fibre, il faut que $y < \mathrm{R}$, donc que $\sin\alpha_0 < \sqrt{-2\,a}$, donc que $\alpha_0 < 8{,}1^\circ$.

CPGÉ PC	**Fibre optique**	**Opt géom**

Merci de signaler d'éventuelles erreurs d'énoncé ou de corrigé à santczak@online.fr.

Une fibre optique d'axe x a un indice variant en fonction de la distance y à l'axe : $n(y) = n_0\,(1 + a\,y^2/\mathrm{R}^2)$, avec $n(\mathrm{R}) = n_2$, où $\mathrm{R} = 25\ \mu\mathrm{m}$, $n_0 = 1{,}5$ et $n_2 = 0{,}99\,n_0$.

Un rayon lumineux entre dans la fibre en $x = 0$, $y = 0$, en faisant un angle α_0 avec l'axe. Déterminer la trajectoire de ce rayon lumineux.

On veut que le rayon se propage dans le cœur de la fibre (pour $|y| < \mathrm{R}$). Quel angle α_0 ne fait-il pas dépasser ?

Corrigé

Comme n_2 est inférieur à n_0, a est négatif ($a = n_2/n_0 - 1 = -0{,}01$). Si on appelle $\alpha(x)$ l'angle que fait le rayon avec la direction axiale, alors l'angle d'incidence est $i = \pi/2 - \alpha$. La loi de Descartes s'écrit $n(y)\ \sin(i(y)) = n(y + \mathrm{d}y)\ \sin(i(y + \mathrm{d}y))$, ou encore $n\ \sin i = \mathrm{C^{te}}$, soit $n\ \cos\alpha = \mathrm{C^{te}} = n_0\ \cos\alpha_0$.

Or
$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}$$

En explicitant $n(y)$, cela donne l'équation différentielle

$$1 + a\,\frac{y^2}{\mathrm{R}^2} = \cos\alpha_0\,\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

On élève au carré, puis on tranforme $1/\cos^2\alpha_0$ en $1 + \tan^2\alpha_0$: on obtient finalement

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \tan^2\alpha_0\,\left(1 + \frac{2\,a}{\mathrm{R}^2\ \sin^2\alpha_0}\,y^2\right)$$

Dans tout ce qui précède, on a considéré un rayon montant (et des angles géométriques). Il faudrait refaire la démonstration pour un rayon descendant. Mais cela permet de passer à la racine carrée en n'envisageant qu'un seul cas. On pose $k = -2\,a/(\mathrm{R}^2\ \sin^2\alpha_0)$ (on a alors $k > 0$) et on obtient

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan^2\alpha_0\,\sqrt{1 - k\,y^2}$$

On doit connaître ou retrouver la primitive de la fonction $1/\sqrt{1 - k\,y^2}$, qui est l'arcsinus. Cela donne, compte tenu des conditions initiales,

$$y = \frac{1}{\sqrt{k}}\ \sin\left(\sqrt{k}\ \tan\alpha_0\,x\right)$$

soit
$$y = \frac{\mathrm{R}\ \sin\alpha_0}{\sqrt{-2\,a}}\ \sin\left(\frac{\sqrt{-2\,a}}{\mathrm{R}\ \cos\alpha_0}\,x\right)$$

C'est une fonction sinusoïdale.

Si on veut que le rayon reste au cœur de la fibre, il faut que $y < \mathrm{R}$, donc que $\sin\alpha_0 < \sqrt{-2\,a}$, donc que $\alpha_0 < 8{,}1°$.