Deux miroirs sphériques convergents coaxiaux de rayons R_1 et R_2 ont des sommets séparés par la distance L. Ils sont placés en regard l'un de l'autre, formant une cavité optique.
On considère un rayon frappant le miroir de droite en un point M_0 situé à l'ordonnée y_0 par rapport à l'axe optique. Ce rayon est incliné de l'angle α_0 par rapport à l'axe optique.
On veut une condition pour que la cavité soit stable pour ce rayon, c'est-à-dire pour que le rayon en question reste au voisinage de l'axe.
Pour déterminer cette condition, rechercher les paramètres $\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ du rayon à son deuxième impact sur le miroir de droite, en fonction de $\begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$, sous forme matricielle. On procédera en plusieurs étapes.

Merci de signaler d'éventuelles erreurs d'énoncé ou de corrigé à santczak@online.fr.

Deux miroirs sphériques convergents coaxiaux de rayons R_1 et R_2 ont des sommets séparés par la distance L. Ils sont placés en regard l'un de l'autre, formant une cavité optique.

On considère un rayon frappant le miroir de droite en un point M_0 situé à l'ordonnée y_0 par rapport à l'axe optique. Ce rayon est incliné de l'angle α_0 par rapport à l'axe optique.

On veut une condition pour que la cavité soit stable pour ce rayon, c'est-à-dire pour que le rayon en question reste au voisinage de l'axe.

Pour déterminer cette condition, rechercher les paramètres $\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ du rayon à son deuxième impact sur le miroir de droite, en fonction de $\begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$, sous forme matricielle. On procédera en plusieurs étapes.

Corrigé

Il s'agit d'un exercice d'optique matricielle. Pour connaître la matrice M telle que $\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \mathrm{M} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$, on va décomposer le trajet du rayon lumineux en parties élémentaires changeant y et α :

1. Réflexion sur le miroir de droite. Le paramètre d'impact y reste inchangé à y_0. Si on introduit ω angle d'incidence du rayon sur le miroir, on montre que le rayon réfléchi fait un angle α'_0 tel que $\omega - \alpha_0 = \alpha'_0 - \omega$. Or $\omega = y_0/\mathrm{R}_1$, d'où l'on déduit $\alpha'_0 = 2\,y_0/\mathrm{R}_1 - \alpha_0$. Cela donne une première relation

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/\mathrm{R}_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

2. Passage du miroir de droite au miroir de gauche. L'angle reste inchangé à α_0. Le paramètre d'impact devient y'_0 tel que $y_0 - y'_0 = \mathrm{L}\,\alpha'_0$. On en déduit donc la relation suivante

$$\begin{pmatrix} y'_0 \\ \alpha'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{L} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha'_0 \end{pmatrix}$$

3. Réflexion sur le miroir de gauche. De même que pour la première réflexion, on peut montrer (en faisant attention aux signes) que

$$\begin{pmatrix} y'_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/\mathrm{R}_2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_0 \\ \alpha'_0 \end{pmatrix}$$

4. Retour au miroir de droite. On a ici de même

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{L} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

En mettant tout cela ensemble, on obtient

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 - \dfrac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_1}\right)\left(1 - \dfrac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_2}\right) - \dfrac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_1} & 2\,\mathrm{L}\left(1 - \dfrac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_2}\right) \\ -\dfrac{2}{\mathrm{R}_2}\left(1 - \dfrac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_1}\right) - \dfrac{2}{\mathrm{R}_1} & -\dfrac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_2} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

On peut déjà constater que $\det \mathrm{M} = 1$ (pas en calculant ce déterminant, mais en calculant le produit des déterminants des quatre matrices intermédiaires). Le produit des deux valeurs propres λ_1 et λ_2 est donc 1, donc $\lambda_1 = 1/\lambda_2$.

On on veut la stabilité de la cavité, donc que y et α restent petits. Les valeurs propres de la matrice, qui seront élevées à la puissance n pour le n-ième impact sur le miroir de droite, doivent donc être, en module, inférieures à 1 toutes les deux. Or $\lambda_1\,\lambda_2 = 1$, ce qui conduit à dire que $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. On pose alors $\lambda_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et on a $\lambda_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

La trace de la matrice donnant l'opposé de la somme des valeurs propres, on a $\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = -2\cos\theta$. Comme le cosinus de θ doit être compris entre -1 et 1, on obtient ainsi une condition sur les paramètres géométriques en écrivant la trace :

$$-2 \leqslant \left(1 - \frac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_1}\right)\left(1 - \frac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_2}\right) - \frac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_1} - \frac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_2} + 1 \leqslant 2$$

ce qui donne

$$0 \leqslant \left(1 - \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}_1}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}_2}\right) \leqslant 1$$

CPGÉ PC	Stabilité d'une cavité optique	Opt géom

Merci de signaler d'éventuelles erreurs d'énoncé ou de corrigé à santczak@online.fr.

Deux miroirs sphériques convergents coaxiaux de rayons R_1 et R_2 ont des sommets séparés par la distance L. Ils sont placés en regard l'un de l'autre, formant une cavité optique.

On considère un rayon frappant le miroir de droite en un point M_0 situé à l'ordonnée y_0 par rapport à l'axe optique. Ce rayon est incliné de l'angle α_0 par rapport à l'axe optique.

On veut une condition pour que la cavité soit stable pour ce rayon, c'est-à-dire pour que le rayon en question reste au voisinage de l'axe.

Pour déterminer cette condition, rechercher les paramètres $\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ du rayon à son deuxième impact sur le miroir de droite, en fonction de $\begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$, sous forme matricielle. On procédera en plusieurs étapes.

Corrigé

Il s'agit d'un exercice d'optique matricielle. Pour connaître la matrice M telle que $\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \mathrm{M} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$, on va décomposer le trajet du rayon lumineux en parties élémentaires changeant y et α :

1. Réflexion sur le miroir de droite. Le paramètre d'impact y reste inchangé à y_0. Si on introduit ω angle d'incidence du rayon sur le miroir, on montre que le rayon réfléchi fait un angle α_0' tel que $\omega - \alpha_0 = \alpha_0' - \omega$. Or $\omega = y_0/\mathrm{R}_1$, d'où l'on déduit $\alpha_0' = 2\,y_0/\mathrm{R}_1 - \alpha_0$. Cela donne une première relation

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/\mathrm{R}_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

2. Passage du miroir de droite au miroir de gauche. L'angle reste inchangé à α_0. Le paramètre d'impact devient y_0' tel que $y_0 - y_0' = \mathrm{L}\,\alpha_0'$. On en déduit donc la relation suivante

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ \alpha_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{L} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0' \end{pmatrix}$$

3. Réflexion sur le miroir de gauche. De même que pour la première réflexion, on peut montrer (en faisant attention aux signes) que

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/\mathrm{R}_2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0' \\ \alpha_0' \end{pmatrix}$$

4. Retour au miroir de droite. On a ici de même

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{L} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0' \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

En mettant tout cela ensemble, on obtient

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 - \dfrac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_1}\right)\left(1 - \dfrac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_2}\right) - \dfrac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_1} & 2\,\mathrm{L}\left(1 - \dfrac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_2}\right) \\ -\dfrac{2}{\mathrm{R}_2}\left(1 - \dfrac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_1}\right) - \dfrac{2}{\mathrm{R}_1} & -\dfrac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_2} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

On peut déjà constater que $\det \mathrm{M} = 1$ (pas en calculant ce déterminant, mais en calculant le produit des déterminants des quatre matrices intermédiaires). Le produit des deux valeurs propres λ_1 et λ_2 est donc 1, donc $\lambda_1 = 1/\lambda_2$.

On on veut la stabilité de la cavité, donc que y et α restent petits. Les valeurs propres de la matrice, qui seront élevées à la puissance n pour le n-ième impact sur le miroir de droite, doivent donc être, en module, inférieures à 1 toutes les deux. Or $\lambda_1\,\lambda_2 = 1$, ce qui conduit à dire que $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. On pose alors $\lambda_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et on a $\lambda_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

La trace de la matrice donnant l'opposé de la somme des valeurs propres, on a $\mathrm{Tr(M)} = -2\cos\theta$. Comme le cosinus de θ doit être compris entre -1 et 1, on obtient ainsi une condition sur les paramètres géométriques en écrivant la trace :

$$-2 \leqslant \left(1 - \frac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_1}\right)\left(1 - \frac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_2}\right) - \frac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_1} - \frac{2\,\mathrm{L}}{\mathrm{R}_2} + 1 \leqslant 2$$

ce qui donne
$$0 \leqslant \left(1 - \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}_1}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}_2}\right) \leqslant 1$$